Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 6 del 2010

[2'5 puntos] Dada la función f : R → R definida como $f(x)= a.sen(x)+ bx^2 + cx + d$, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto (0, 4) y que la segunda derivada de f es $f''(x) = 3.sen(x) - 10$.

Solución

$f(x)= a.sen(x)+ bx^2 + cx + d$. Esta función es continua y derivable en todo R
Como tiene tangente horizontal en (0,4) me dicen que f(0) = 4 y además que f'(0) = 0
$f(x)= a.sen(x)+ bx^2 + cx + d$
$f'(x)= a.cos(x)+ 2bx + c$
$f''(x)= -a.sen(x)+ 2b$
De f(0) = 4, tenemos 4 = a.sen(0)+ 0 + 0 + d = d, es decir **d = 4**.
De f'(0) = 0, tenemos 0 = a.cos(0) + 0 + c = a + c, es decir **a + c = 0**.
Como me dicen que f''(x) = 3.sen(x) – 10, igualando tenemos -a = 3 y 2b = 10, de donde **a = -3** y **b = 5**.
De a + c = 0 tenemos **c** = -a = -(-3) = **3**.

Ejercicio 2 opción A, modelo 6 del 2010

Sea la función f dada por $f(x) = 1/(x^2+x)$ para $x \neq -1$ y $x \neq 0$. Determina una primitiva F de f tal que F(1) = 1.

Solución

$f(x) = 1/(x^2+x)$ para $x \neq -1$ y $x \neq 0$
Una primitiva F(x) es $F(x) = \int [1/(x^2+x)].dx = \int [1/(x(x+1))].dx = \int [A/x + B/(x+1)].dx = **$

La descomposición en suma de fracciones simples es 1/(x(x+1)) = A/x + B/(x+1) =
= [(A(x+1) + B(x))] / (x.(x - 4)). Igualando numeradores tenemos 1 = A(x+1) + B(x)

Tomando x = 0, nos sale 1 = A(1), de donde A = 1
Tomando x = -1, nos sale 1 = B(-1), de donde B = -1

Seguimos ya con la integral
$**= \int [1/x - 1/(x+1)].dx = \ln|x| - \ln|x+1| + K$

Como la primitiva F(x) = ln|x| - ln|x+1| + K dicen que verifica F(1) = 1, tenemos 1 = ln(1) – ln(2) + K, de donde obtenemos K = 1 + ln(2), es decir F(x) = ln|x| - ln|x+1| + 1 + ln(2).

Ejercicio 3 opción A, modelo 6 del 2010

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda x +2y + 6z &= 0 \\ 2x + \lambda y + 4z &= 2 \\ 2x + \lambda y + 6z &= \lambda - 2 \end{aligned}$$

(a) [1'75 puntos] Discútelo según los valores del parámetro λ.
(b) [0'75 puntos] Resuélvelo para λ = 2.

Solución

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda x +2y + 6z &= 0 \\ 2x + \lambda y + 4z &= 2 \\ 2x + \lambda y + 6z &= \lambda - 2 \end{aligned}$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 6 \\ 2 & \lambda & 4 \\ 2 & \lambda & 6 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 6 & 0 \\ 2 & \lambda & 4 & 2 \\ 2 & \lambda & 6 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 nº de incógnitas, el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&2&6\\2&\lambda&4\\2&\lambda&6\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ F_3\text{-}F_2\end{matrix} = \begin{vmatrix}\lambda&2&6\\2&\lambda&4\\0&0&2\end{vmatrix}\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{tercera}\\ \text{fila}\end{matrix} = 2(\lambda^2-4).$$

Resolvemos |A| = 0, es decir $\lambda^2 - 4 = 0$, de donde $\lambda = 2$ y $\lambda = -2$

Si **$\lambda \neq 2$** y **$\lambda \neq -2$**, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas, y por el teorema de *Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si **$\lambda = 2$**, $A = \begin{pmatrix}2&2&6\\2&2&4\\2&2&6\end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix}2&2&6&0\\2&2&4&2\\2&2&6&0\end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix}2&6\\2&4\end{vmatrix} = -8 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $|A| = \begin{vmatrix}2&6&0\\2&4&2\\2&6&0\end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A) = 2 = rango(A^*) < nº de incógnitas, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Si **$\lambda = -2$**, $A = \begin{pmatrix}-2&2&6\\2&-2&4\\2&-2&6\end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix}-2&2&6&0\\2&-2&4&2\\2&-2&6&-4\end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix}2&6\\-2&4\end{vmatrix} = 20 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como $|A| = \begin{vmatrix}2&6&0\\-2&4&2\\-2&6&-4\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ F_2+F_1\\ F_3+F_1\end{matrix} = \begin{vmatrix}2&6&0\\0&10&2\\0&12&-4\end{vmatrix}\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{primera}\\ \text{columna}\end{matrix} = 2(-40+24) \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

Como rango(A) = 2 ≠ rango(A^*) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible y no tiene solución.

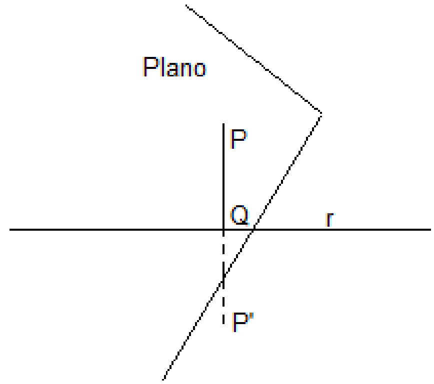
(b)
Nos piden resolverlo si **$\lambda = 2$**.
Hemos visto que c*omo rango(A)= 2 = rango(A^*) < nº de incógnitas, por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.*
Como el rango es 2 utilizaremos sólo dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..
2x + 2y + 6z = 0
2x + 2y + 4z = 2. Restamos ambas ecuaciones y tenemos -2z = 2, de donde **z = -1**.
Tomando x = λ cualquier nº real tenemos λ + y + 3(-1) = 0, de donde y = 3 – λ, las infinitas soluciones del sistema son (x,y,z) = (λ, 3 – λ, -1) con λ nº real.

Ejercicio 4 opción A, modelo 6 del 2010

[2’5 puntos] Halla el punto simétrico de P(1,1,1) respecto de la recta r de ecuación
(x – 1)/2 = y/3 = (z +1)/(-1)

Solución

Simétrico de P(1,1,1) respecto de la recta r : (x – 1)/2 = y/3 = (z +1)/(-1).
De la recta tomo el punto A(1,0,-1) y el vector director **u** = (2,3,-1)



Trazamos el plano π perpendicular a la recta “r” (su vector normal puede ser el vector director de la recta, es decir **n** = **u** = (2,3,-1)). Calculamos el punto Q intersección de la recta con el plano. El punto Q es el punto medio del segmento PP’ donde P’ es el simétrico buscado.
Un plano paralelo al pedido es 2x + 3y – z + K = 0. Como pasa por el punto P(1,1,1) tenemos 2+3-1+K=0, de donde K = -4 y el plano π es 2x + 3y – z – 4 = 0.
Ponemos la recta “r” en paramétricas o vectorial para sustituirla en el plano.
“r” : (x,y,z) = (1+2λ, 0+3λ, -1- λ)
Sustituimos “r” en “π”
2(1+2λ) + 3(3λ) – (-1- λ) – 4 = 0 = 2 + 4λ + 9λ + 1 + λ - 4 = 14λ-1 = 0, de donde λ = 1/14 y el punto Q es Q(1+2(1/14), 3(1/14), -1- (1/14)) = Q(16/14, 3/14, -15/14)
Q es el punto medio del segmento PP’, es decir (16/14, 3/14, -15/14) = ((1+x)/2, (1+y)/2, (1+z)/2).
Igualando tenemos
16/14 = (1+x)/2, de donde x = 32/14 – 1 = 18/14
3/14 = (1+y)/2, de donde y = 6/14 – 1 = -8/14
-15/14 = (1+z)/2, de donde z = -30/14 – 1 = -44/14
El punto simétrico pedido es P’(x,y,z) = P’(18/14, -8/14, -44/14)

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 6 del 2010

[2’5 puntos] Considera la función f : R → R definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } 1 \le x \end{cases}$

Estudia su continuidad y derivabilidad. Determina la función derivada de f.

Solución

$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } 1 \le x \end{cases}$. Estudia su continuidad y derivabilidad

e^{-x} es continua y derivable en todo R, en particular en x < 0
$1 - x^2$ es continua y derivable en todo R, en particular en 0 < x < 1
2/(x+1) es continua y derivable en R – {-1}, en particular en 1 < x

Sólo nos falta ver la continuidad y derivabilidad en x = 0 y x = 1

Para que f sea continua en x = 0 tenemos que ver que:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} [f(x)] = \lim_{x\to 0^+} [f(x)]$$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} [f(x)] = \lim_{x\to 0^-} [\, e^{-x} \,] = e^{0} = 1 = 1$
$\lim_{x\to 0^+} [f(x)] = \lim_{x\to 0^+} [\, 1 - x^2 \,] = (1 – 0) = 1$, por tanto f es continua en x = 0

Para que f sea continua en x = 1 tenemos que ver que:

$$f(1) = \lim_{x\to1+} [f(x)] = \lim_{x\to1-} [f(x)]$$

$f(1) = \lim_{x\to1+} [f(x)] = \lim_{x\to1+} [\ 2/(\ x+1)\ ] = \ 2/.(\ 1+1) = 1$

$\lim_{x\to1-} [f(x)] = \lim_{x\to1-} [1 - x^2] = (1 - 1) \ = 0$, por tanto f no es continua en x = 1 y por tanto tanpoco tampoco es derivable en x = 1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1. \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-x}.(-1) & \text{si} \quad x < 0 \\ -2x & \text{si} \quad 0 < x < 1. \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Para que f sea derivable en x = 0 tenemos que:

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$

Vamos a utilizar la continuidad de la derivada que es más rápido

$f'(0^-) = \lim_{x\to0-} [f'(x)] = \lim_{x\to0-} [- e^{-x}] = -e^0 = - 1.$

$f'(0^+) = \lim_{x\to0+} [f'(x)] = \lim_{x\to0+} [\ -2x\ ] = \ 0$, como no son iguales la función no es derivable en x = 0

Ejercicio 2 opción B, modelo 6 del 2010

Sean f, g : R → R las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x +3$ y $g(x) = (1/2)x^2 +1$.

(a) [1 punto] Esboza las gráficas de f y g, y halla su punto de corte.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

Solución

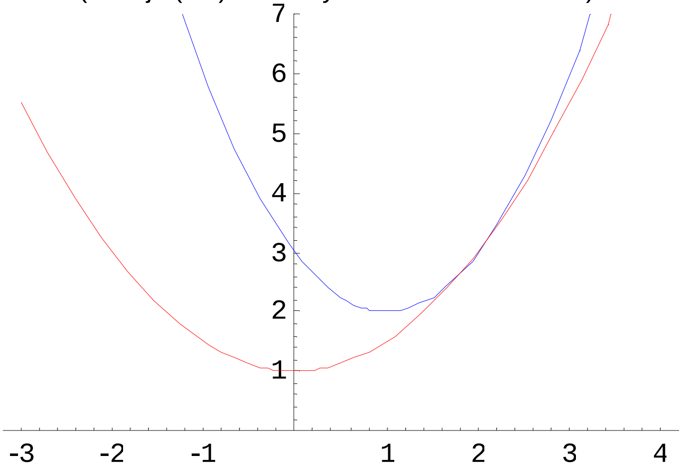
(a)

$f(x) = x^2 - 2x +3$ y $g(x)= (1/2)x^2 +1$.

$f(x) = x^2 - 2x +3$ es un parábola con las ramas hacia arriba. Vértice en (-b/2a, f(-b/2a)) = (1, 2). Corta al eje OY en (0,3), y como la ecuación $x^2 - 2x +3 \ = 0$ no tiene soluciones reales no corta al eje OX.

$g(x) = (1/2)x^2 +1$ es un parábola con las ramas hacia arriba, parecida a x^2 pero desplazada una unidad hacia arriba en el eje OY. Vértice en (0, 1). Corta al eje OY en (0,1), y es simétrica respecto a dicho eje OY. Como la ecuación $(1/2)x^2 + 1 \ = 0$ no tiene soluciones reales no corta al eje OX.

Un esbozo de dichas gráficas es (en rojo $(1/2)x^2 + 1$ y en azul $x^2 - 2x +3$)



Veamos sus puntos de corte, resolviendo la ecuación f(x) = g(x), es decir $x^2 - 2x +3 = (1/2)x^2 +1$. Operando obtenemos $x^2 - 4x + 4 = 0$, y sus soluciones son x = 2 (doble).

(b)

Como me piden el área del recinto limitado por las gráficas y el eje de ordenadas OY tenemos que:

Área = $\int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 [x^2 - 2x +3 - (1/2)x^2 - 1].dx = \int_0^2 [(1/2)x^2 - 2x + 2]dx =$
$= [x^3/6 - x^2 + 2x]_0^2 = (8/6 - 4 + 4) - (0) = 8/6$ u.a.

Ejercicio 3 opción B, modelo 6 del 2010

De la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se sabe que det(A) = 4. Se pide:

(a) [1'25 puntos] Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$. Indica las propiedades que utilizas.

(A^t es la matriz traspuesta de A).
(b) [0'75 puntos] Calcula $\det(A^{-1}.A^t)$.
(c) [0'5 puntos] Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$, siendo I la matriz identidad, halla det(B).

Solución

(a)
Tenemos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con det(A) = 4. Determinante ("det")
Sabemos que si A es una matriz cuadrada de orden "n" entonces $\det(k.A) = k^n.\det(A)$.
También sabemos que el $\det(A) = \det(A^t)$
$\det(-3A^t) = (-3)^2. \det(A^t) = 9.\det(A) = 9.4 = 36.$
Si en un "det" hay un nº que multiplica a una fila (columna) dicho nº sale fuera multiplicando al "det".
Si en un "det" cambiamos entre si dos filas (columnas) el "det" cambia de signo.
$\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix} = 2.(-3). \det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = 2(-3)(-1). \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 6.4 = 24.$
(b)
Sabemos que det(M.N) = det(M).det(N), siendo M y N matrices cuadradas del mismo orden.
De la definición de inversa tenemos $A.A^{-1} = I$, siendo I la matriz identidad, de la cual sabemos que det(I) = 1.
$\det(A.A^{-1}) = \det(I) = 1 = \det(A).\det(A^{-1})$, de donde $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

En nuestro caso $\det(A^{-1}.A^t) = \det(A^{-1}).\det(A^t) = (1/\det(A)). \mathrm{Det}(A) = \det(A) /\det(A) = 4/4 = 1.$
(c)
Si $B^3 = I$, halla det(B).
$B^3 = B.B.B = I$, luego $\det(B^3) = \det(B.B.B) = \det(B). \det(B). \det(B) = [\det(B)]^3 = \det(I) = 1$, luego $\det(B) = \sqrt[3]{(1)} = 1$.

Ejercicio 4 opción B, modelo 6 del 2010

Sean los puntos $A(2, \lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, 2, 0)$ y $C(0, \lambda, \lambda - 1)$.
(a) [1 punto] ¿Existe algún valor de $\lambda \in R$ para el que los puntos A, B y C estén alineados? Justifica la respuesta.
(b) [1'5 puntos] Para $\lambda = 1$ halla la ecuación del plano que contiene al triangulo de vértices A, B y C. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

Solución

(a)
$A(2, \lambda, \lambda)$, $B(-\lambda, 2, 0)$ y $C(0, \lambda, \lambda - 1)$.
Para que los puntos A, B y C estén alineados las coordenadas de los vectores **AB** y **AC** tienen que ser proporcionales.
AB $= (-\lambda - 2, 2 -\lambda, -\lambda)$
AC $= (-2, 0, -1)$
Como tiene que darse "$-2/(-\lambda - 2) = 0/(2 - \lambda) = -1/ (-\lambda)$", vemos que hay un único valor de λ que haga cierta la doble igualdad, que es $\lambda = 2$. Veámoslo con las dos ecuaciones que tiene que verificarse a la vez
$-2/(-\lambda - 2) = 0/(2 - \lambda)$, de donde $-4 +2\lambda = 0$, por tanto $\lambda = 2$.
$0/(2 - \lambda) = -1/ (-\lambda) = 1/ \lambda$, de donde $0 = 2 - \lambda$, por tanto $\lambda = 2$. Como $\lambda = 2$ es el mismo, los tres puntos A, B y C están alineados.
(b)
Para $\lambda = 1$ tenemos A(2,1,1), B(-1,2,0) y C(0,1,0).
Para un plano necesitamos un punto, el A(2,1,1) y dos vectores independientes el **AB** y el **AC**.

AB =(−1– 2, 2 –1,−1) = (-3,1,-1)
AC = (– 2, 0, −1)

$$\text{El plano sería } \det(\mathbf{AX},\mathbf{AB},\mathbf{AC}) = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x-2)(-1) - (y-1)(1) + (z-1)(2) =$$

$= -x + 2 - y + 1 + 2z - 2 = -x - y + 2z + 1 = x + y - 2z - 1 = 0$.

El vector normal del plano $x + y - 2z - 1 = 0$ es **n** = (1,1,-2).

Se sabe que si se divide un plano por el módulo de su vector normal el valor absoluto de su término independiente es la distancia del origen a dicho plano.

Modulo de **n** = ||**n**|| = $\sqrt{(1^2+1^2+2^2)} = \sqrt{(1+1+4)} = \sqrt{(6)}$.

Dividimos el plano $x + y - 2z - 1 = 0$ por $\sqrt{(6)}$, y obtenemos $x/\sqrt{(6)} + y/\sqrt{(6)} - 2z/\sqrt{(6)} - 1/\sqrt{(6)} = 0$, por tanto la distancia del origen a dicho plano es $1/\sqrt{(6)} = \sqrt{(6)}/6$ u.l.